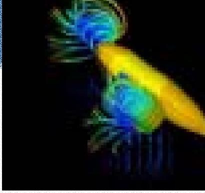
普遍教育専門基礎科目(07322103)

物理学B(特)力学入門1
Physics BI: Introduction to Mechanics 1

劉　浩



［授業計画・授業内容］

１.座標系、位置ベクトル、速度、加速度などのベクトル表現
２.物体の運動と運動の第１、第２、第３法則の関係および慣性座標系
３.運動方程式から運動の変化は力積で表せる力積と物体の衝突
４.１次元の運動、運動方程式の積分により直線上の運動、単振動等
５.力と運動エネルギー及びポテンシャルの保存性
６.抵抗を受ける物体の２次元運動
７.円運動と向心力及び遠心力
８.中間試験
９.力の変化とエネルギーとの関係、仕事と運動エネルギーの関係
10.力のポテンシャルと保存力
11.ケプラーの第１、第２、第３法則と万有引力の法則
12.惑星の運動と中心力の関係、中心力と面積速度
13.太陽の引力と惑星の運動、人工衛星、中心力とクーロン力
14.角運動量、角運動量ベクトルの性質
15.期末試験

Chapter 4-4: ケプラーの法則から太陽の引力を導く

第１法則：

惑星は太陽を焦点の１つとする楕円軌道を描く

$$\frac{l}{r} = 1 + \varepsilon \cos\varphi$$

第２法則：

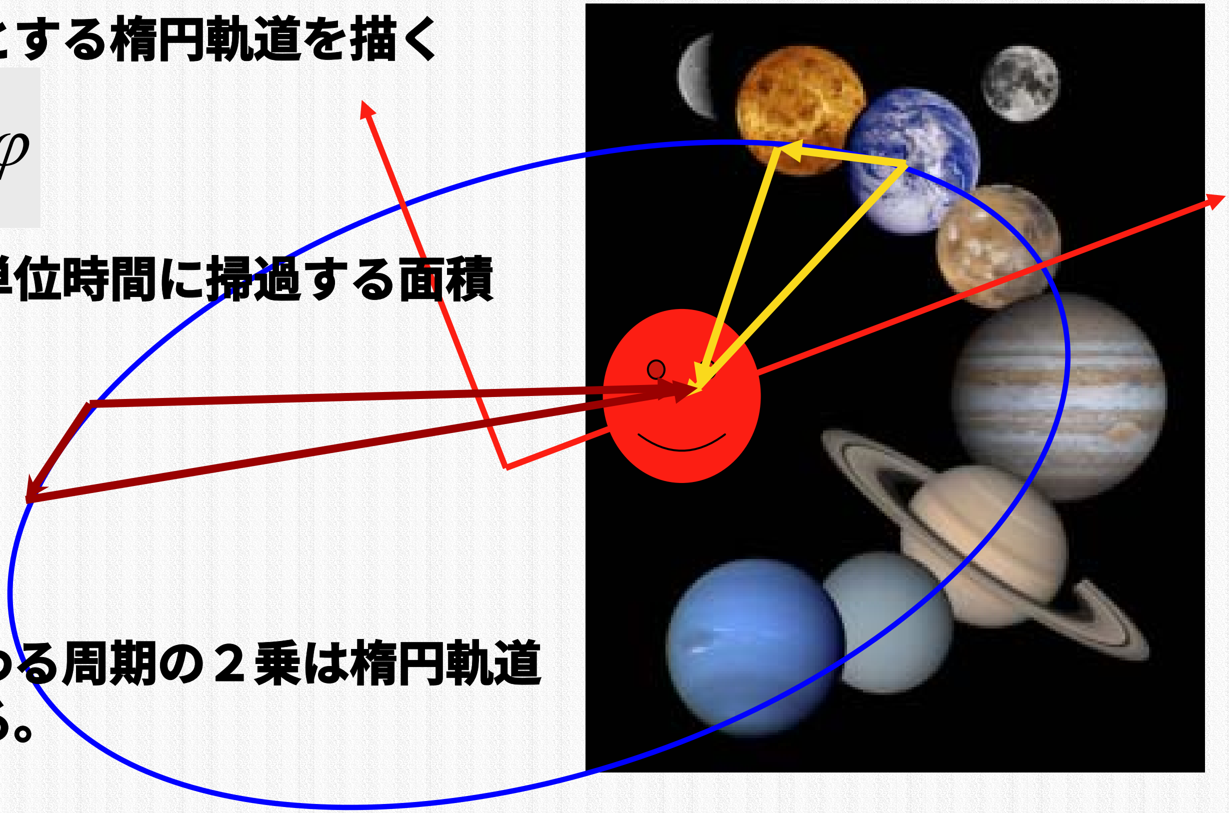
太陽と惑星を結ぶ直線が単位時間に掃過する面積（面積速度）は一定である。

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} h$$

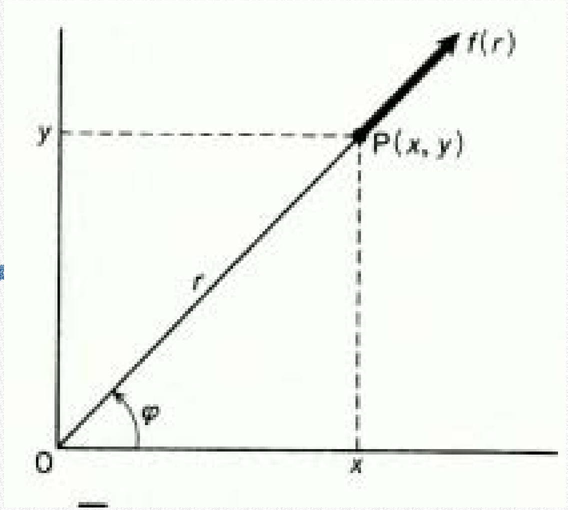
第３法則：

惑星が太陽のまわりをまわる周期の２乗は楕円軌道の長半径の３乗に比例する。

$$T^2 \propto a^3$$



平面極座標系における運動方程式2:
中心力及び方程式、そして面積速度（一定）



$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi})=f(r)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})=0$$

万有引力の法則：２個の質点の引力の大きさはそれらの質量の積に比例し、距離の２乗に反比例し、これらの質点を結ぶ方向にはたらく。

$$f(r)=-G\frac{mM}{r^2}\Rightarrow U(r)=-G\frac{mM}{r}$$

$$G=6.672\times10^{-11}N\bullet m^2/kg^2$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right),U=-G\frac{mM}{r}\Rightarrow K+U=E$$

Chapter 4-5:太陽の引力から惑星の運動を導くこと

惑星の運動を表す模型：　漏斗

$$U = -G\frac{mM}{r_0} \Rightarrow K + U = -\frac{1}{2}G\frac{mM}{r_0}$$

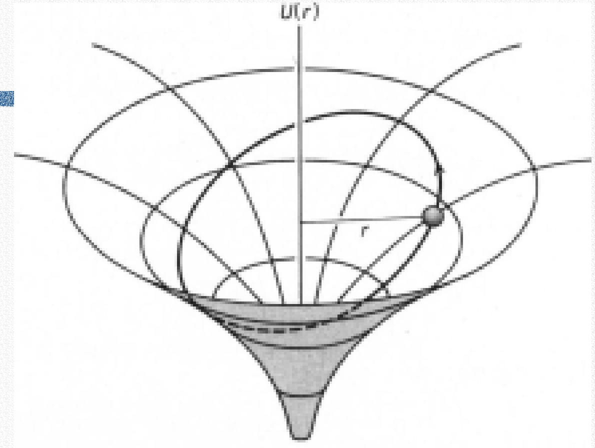


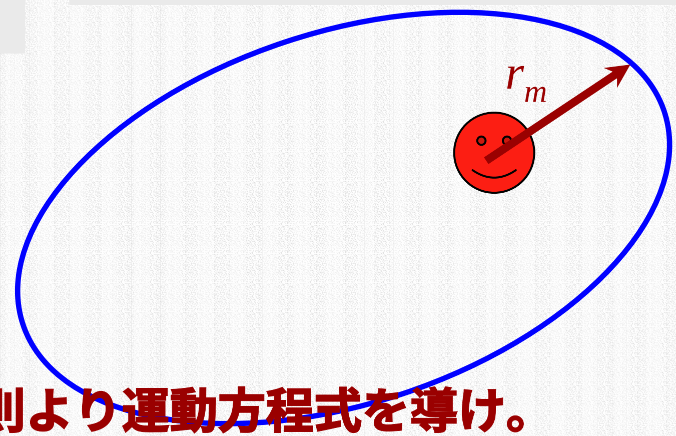
図 4-19　引力ポテンシャルによる運動の模型.

軌道の形とエネルギーと面積速度の関係：

$$E = \frac{mh^2}{2r_m^2} - G\frac{mM}{r_m} = \frac{mh^2}{2r_m}\left(\frac{1}{r_m} - 2\frac{GM}{h^2}\right)$$

$$r = \frac{l}{1+\varepsilon\cos\varphi} \Rightarrow r_m = \frac{l}{1+\varepsilon}$$

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2h^2E}{mG^2M^2}$$



例題：面積速度一定の法則とエネルギー保存の法則より運動方程式を導け。

Chapter 4-5＊:人工衛星

人工衛星の周期：

$$m\frac{v^2}{R} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 mg \Rightarrow v = \sqrt{\frac{R_0^2 g}{R}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2}{R_0^2 g}}$$

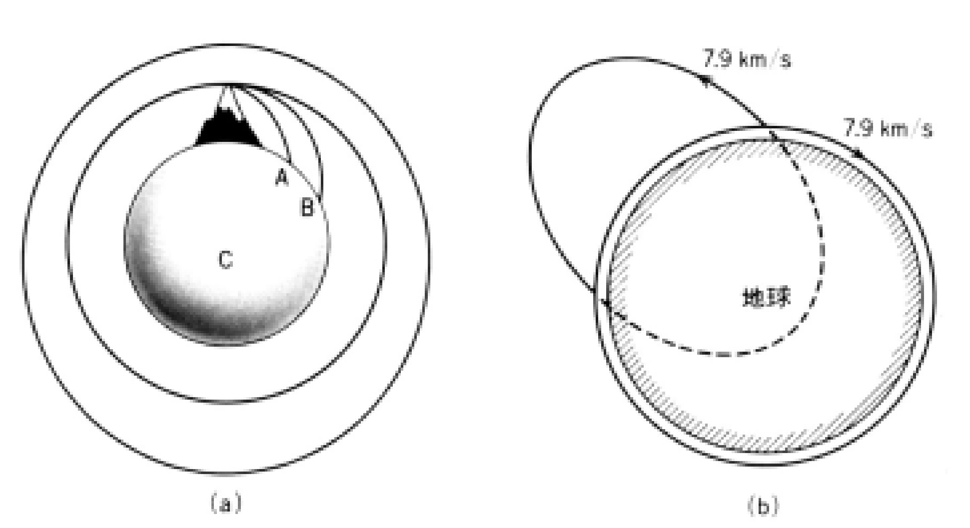
$$R_0 = R + h = 6370 + 300 \Rightarrow v_0 \approx 7.9 m/s, T_0 \approx 1.4h$$

静止衛星：

$$T^2 \propto a^3$$

$$\left(\frac{R_1}{R_0}\right) = \left(\frac{24}{1.4}\right)^{3/2} = 6.65$$

$$R_1 = 6.65 R_0$$



(a) (b)

Chapter 4-6:惑星の位置の時間変化

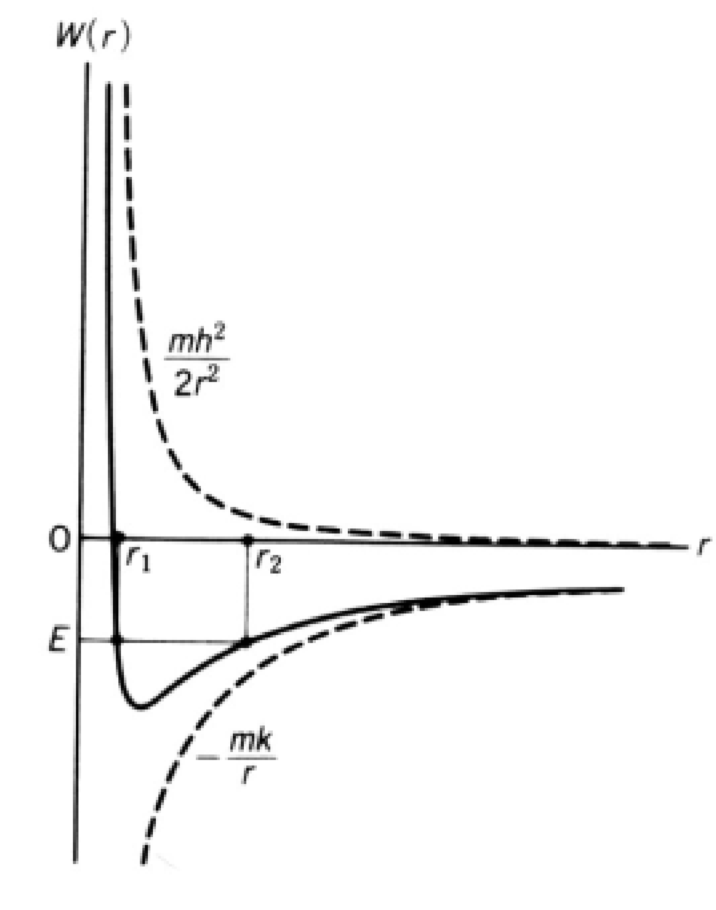
エネルギー積分　～　ケプラーの方程式

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2-\frac{mk}{r}+\frac{mh^2}{2r^2}=E, k=GM$$

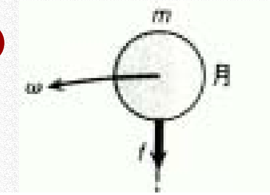
$$W(r)=-\frac{mk}{r}+\frac{mh^2}{2r^2}\Rightarrow\frac{1}{2}\dot{r}^2=\frac{E-W(r)}{m}$$

$$\Rightarrow\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\{E-W(r)\}}, \{E-W(r)\}\geq 0$$

$$r=a(1-\varepsilon\cos\theta)\Rightarrow\omega t=\theta-\varepsilon\cos\theta$$



Chapter 4-7:球形の物体によるポテンシャル



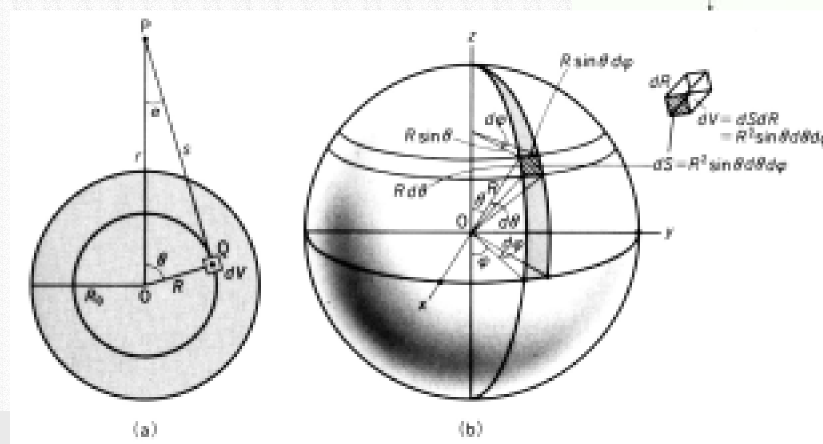
球形による万有引力は、その全質量が中心に集まったと仮定したときの万有引力に等しい。

1）球形物体の各部分による万有引力の合力として求める

2）体積要素による引力

$$f_{PO} = G\frac{m\rho(R)dV}{s^2}\cos\alpha$$

$$dV = R^2\sin\theta dR d\theta d\varphi, \cos\alpha = \frac{r - R\cos\theta}{s}$$

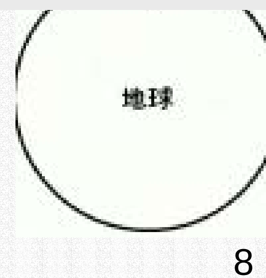


3）球形物体に対する積分

$$f(r) = -Gm\int_0^{R_0} dR\int_0^{\pi} d\theta 0\int^{2\pi} d\varphi\frac{r - R\cos\theta}{s^3}\rho(R)R^2\sin\theta$$

$$U(r) = -Gm\int_0^{R_0} dR\int_0^{\pi} d\theta 0\int^{2\pi} d\varphi\frac{\rho(R)R^2\sin\theta}{s}, -\frac{dU}{dr} = f(r)$$

$$f = -G\frac{mM}{r^2}$$

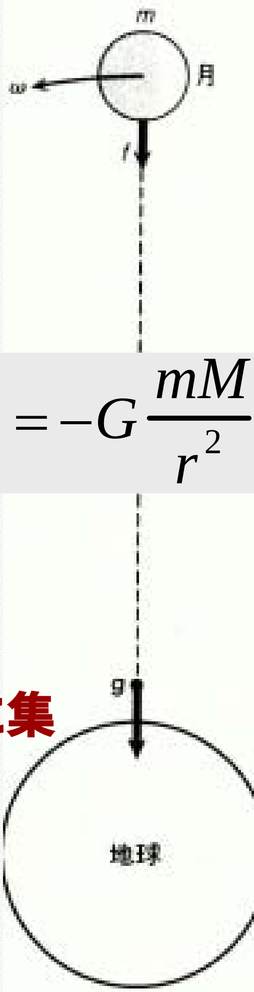


Chapter 4-7:球形の物体によるポテンシャル

$$f(r) = -Gm\int_0^{R_0} dR\int_0^{\pi} d\theta 0\int^{2\pi} d\varphi \frac{r - R\cos\theta}{s^3}\rho(R)R^2\sin\theta$$

$$U(r) = -Gm\int_0^{R_0} dR\int_0^{\pi} d\theta 0\int^{2\pi} d\varphi \frac{\rho(R)R^2\sin\theta}{s}$$

$$= -\frac{Gm}{r}4\pi\int_0^{R_0}\rho(R)R^2 dR = -G\frac{mM}{r} \Rightarrow f(r) = -G\frac{mM}{r^2}$$



$$f = -G\frac{mM}{r^2}$$

球対称な２個の球間の万有引力は各球の全質量がそれぞれおの中心に集まったと仮想したときの引力に等しい。

$$U = U_1 + U_2 +,,, = -\frac{Gm_1M}{r_1} - \frac{Gm_2M}{r_2},,,$$

Chapter 4-7:球形の物体によるポテンシャル

一様な球殻の内部：

$$U(r) = -G\rho R^2 \int\int \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{s} = -G4\pi\rho R$$

$$\Rightarrow \ f(r) = 0$$

地球の中心を通り、真直ぐ通り抜ける穴へ落とした質点は単振動をする

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -f = -G\frac{mM}{x^2} = -G\frac{m}{x^2}(\rho\frac{4\pi}{3}x^3) = -G\rho\frac{4\pi}{3}mx$$

Chapter 4-6＊:地球から脱出には

地球から脱出：

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \geq -U_{earth} = G\frac{mM}{R_0} = mgR_0 \Rightarrow v_0 \approx 11.2km/s$$

太陽から脱出：

$$\frac{1}{2}mv_1^2 \geq -U_{sun} = G\frac{mM}{R_1} \Rightarrow v_1 \approx 28.0km/s$$