専門科目(TG010001)

流体力学II
Fluid Mechanics II

劉　　浩
太田匡則

レイノルズ数による相似性
(Reynolds Number-based Similarity)

- 粘性流体の特徴を表すレイノルズ数：

Re=慣性力/粘性力

$$\mathrm{Re} = \frac{(\rho U^2 / L)L^3}{(\mu U / L^2)L^3} = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}, \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

- レイノルズ数の相似性：

同じReをもつ流体現象は似た性質を有する

- 無次元化された支配方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

相似性と無次元化
(Similarity and Nondimensionalization)

- **代表的物理量：**
  代表長さ＝L　代表速度＝U　代表時間＝T=L/U
- **無次元化:**
  (u,v,w) = U(u*,v*,w*), (x,y,z) = L(x*,y*,z*), t=t*L/U

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

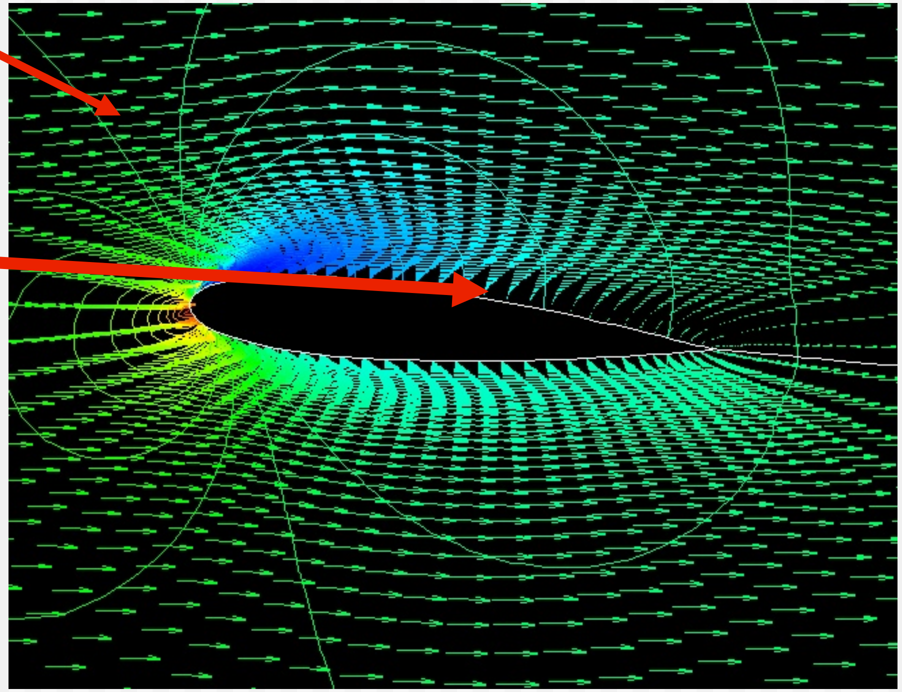
$$\frac{U}{L/U}\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+\frac{U^2}{L}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}u^*+\frac{\partial u^*}{\partial y^*}v^*\right)=-\frac{1}{\rho L}\frac{\partial p}{\partial x^*}+\nu\frac{U}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+\frac{\partial u^*}{\partial x^*}u^*+\frac{\partial u^*}{\partial y^*}v^*=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{1}{UL/\nu}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right)\Leftarrow p^*=\frac{p}{\rho U^2 L}$$

$$\mathrm{Re}=\frac{UL}{\nu}$$

境界層方程式 (Boundary Layer Equation)

- 流体支配方程式：



- 境界層近似：
  @物体から離れた所
  @物体近傍

境界層近似
(Boundary layer Approximation)

- 境界層近似：
  @境界層は薄い、**δ/L=**小さい

  $$\delta / l \approx O(0) \to x \propto l, y \propto \delta$$

  @境界層を横切る方向の速度成分**v～δ**

  $$v / U \approx O(0) \to v \propto \delta \Rightarrow u \propto l, v \propto \delta$$

  @圧力は境界層内**(y**方向**)**で一定

  $$\frac{\partial p}{\partial y} \approx O(0)$$

  @粘性項のうち、**x**方向の２回微分は省略できる

  $$\frac{\partial u}{\partial x} / \frac{\partial u}{\partial y} \approx O(0) \to \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx O(0)$$

境界層方程式の導出

(Formation of Boundary Layer Equation)

- **境界層方程式とその特徴：　有次元化**

(u,v,w) = U(u*,v*,w*), (x,y,z) = L(x*,y*,z*), t=t*L/U $\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu}$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}u^* + \frac{\partial u^*}{\partial y^*}v^* = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$p + \rho\frac{U^2}{2} = Const \Rightarrow \frac{dp}{dx} + \rho U\frac{dU}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad x,u = O(l),\ y,v = O(\delta),\ \frac{1}{\mathrm{Re}} = O(\delta^2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

境界層の解析例１

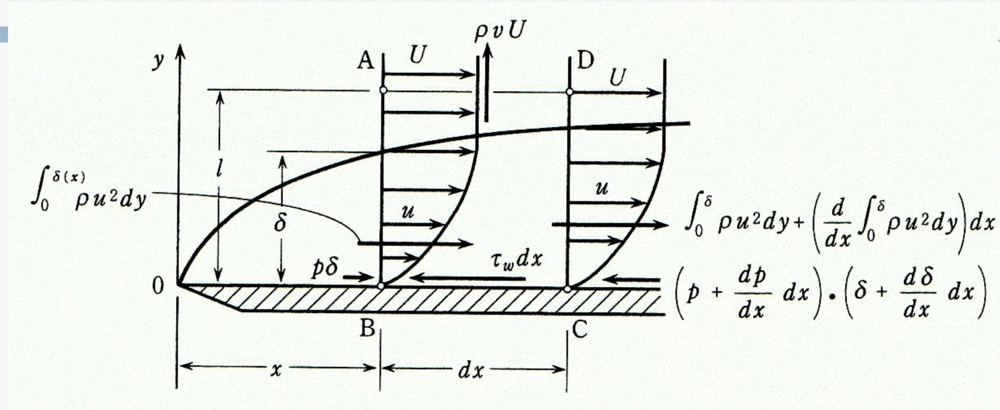
Boundary layer problems

- 平板に沿う境界層１：

@境界層内部速度分布の相似

$$\frac{u}{U} \propto f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\delta(x) \propto x/\sqrt{\mathrm{Re}_x}, \mathrm{Re}_x = Ux/\nu$$



@座標変換（写像）：

$$x' = x, \eta = y\sqrt{\mathrm{Re}_x}/x \qquad f(\eta) = \Psi\sqrt{\mathrm{Re}_x}/Ux \to \Psi : StreamFunction$$

@ブラジウスの微分方程式：

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{Udf}{d\eta}, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x'} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\frac{U}{\sqrt{\boldsymbol{Re}_x}}\left(\eta\frac{df}{d\eta} - f\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{f}{2}\frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0$$

@境界条件：

$$Non-slip : \eta = 0 \to f = 0, f_\eta = 0$$

$$Outside : \eta >> 1 \to f_\eta = 1$$

境界層の解析例１

Boundary layer problems

- 平板に沿う境界層２：
  ＠ブラジウスの微分方程式の解
  数値積分解は実験値とよく合致
  展開近似：

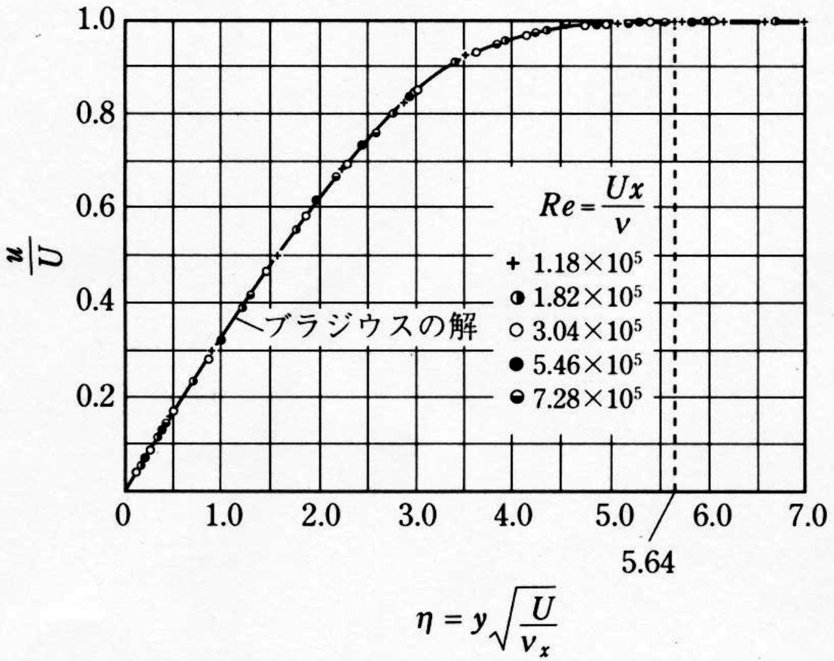
$$u/U = C_0 + C_1\eta + C_2\eta^2 \Rightarrow \delta = 5.48x/\sqrt{\mathrm{Re}_x}$$

壁面摩擦抵抗係数：

$$f_{\eta\eta} = 0.332 \rightarrow \tau_w = \mu\partial u/\partial y$$

$$\tau_w = \mu\sqrt{\mathrm{Re}_x}Uf_{\eta\eta}/x = 0.332\rho U^2/\sqrt{\mathrm{Re}_x}$$

$$C_f = \tau_w/(0.5\rho U^2) = 0.664/\sqrt{\mathrm{Re}_x}$$



＠例題**6.3: U=20m/s, x=30cm**のとき、境界層と壁面せん断応力を求めなさい。$\mathrm{Re}_x = Ux/\nu = 3.9x10^5$

$$\delta = 5.48x/\sqrt{\mathrm{Re}_x} = 2.63mm, \tau_w = 0.332\rho U^2/\sqrt{\mathrm{Re}_x} = 248g/ms^2$$

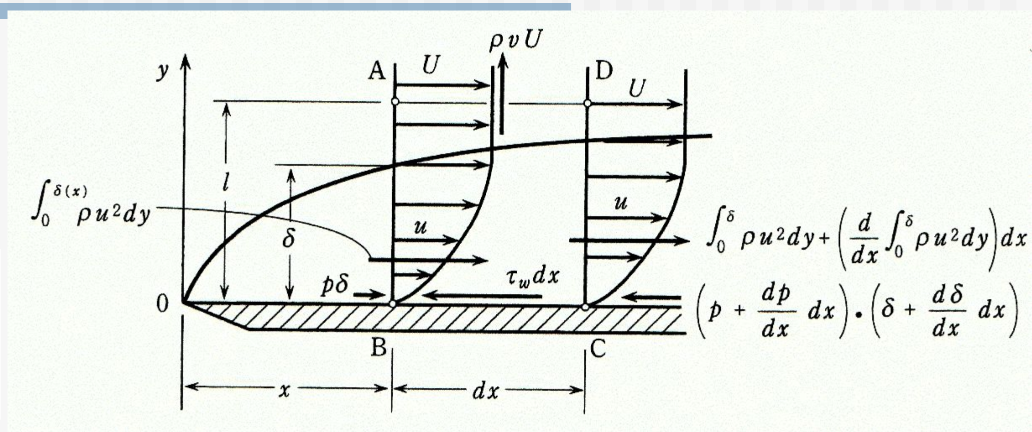
境界層の解析例２
Boundary layer problems

- 円柱と球のまわりの境界層１：

 ＠円柱まわりの境界層：
 平板境界層近似を適用

$$\Delta p/\,\Delta y = \rho U^2 / a$$

$$\Rightarrow \Delta p = \rho U^2 \delta / a \to 0, When\,\delta << 1$$



＠円柱まわりの境界層の微分方程式：曲線座標系
一般座標系における境界層方程式と同型

$$\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

境界層の解析例２

Boundary layer problems

- 円柱と球のまわりの境界層２：

@円柱まわりの境界層方程式の解：

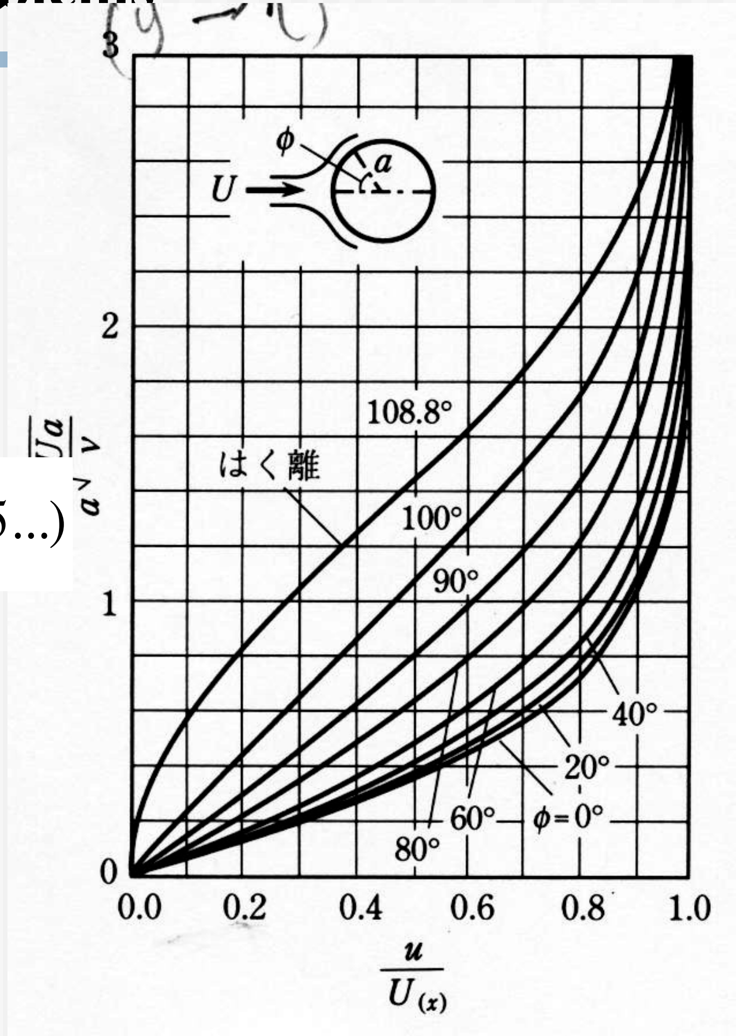
外縁でポテンシャル流れ

$$U(x) = U\sin(\frac{x}{a}) = 2U_0(\frac{x}{a}) - 2U_0\frac{1}{3!}(\frac{x}{a})^3 + \ldots$$

円柱表面で境界層方程式

$$f(\eta,\frac{x}{a}) = f_1(\eta,\frac{x}{a}) + f_3(\eta,\frac{x}{a})^3 + \ldots \Rightarrow f_i(i = 1,3,5\ldots)$$

$$\frac{u}{U(x)} \Leftrightarrow \frac{y}{a}\sqrt{\frac{Ua}{\nu}},\phi(0 \to \pi)$$



@流れの剥離：

境界層は上流側で薄く、下流側で厚く

角度＝108.8（実験では80）になると、

剥離が発生

$$u = 0,\frac{\partial u}{\partial y} < 0$$

境界層の解析例３

Boundary layer problems

- 円柱と球のまわりの境界層：

@球まわりの境界層方程式の解：

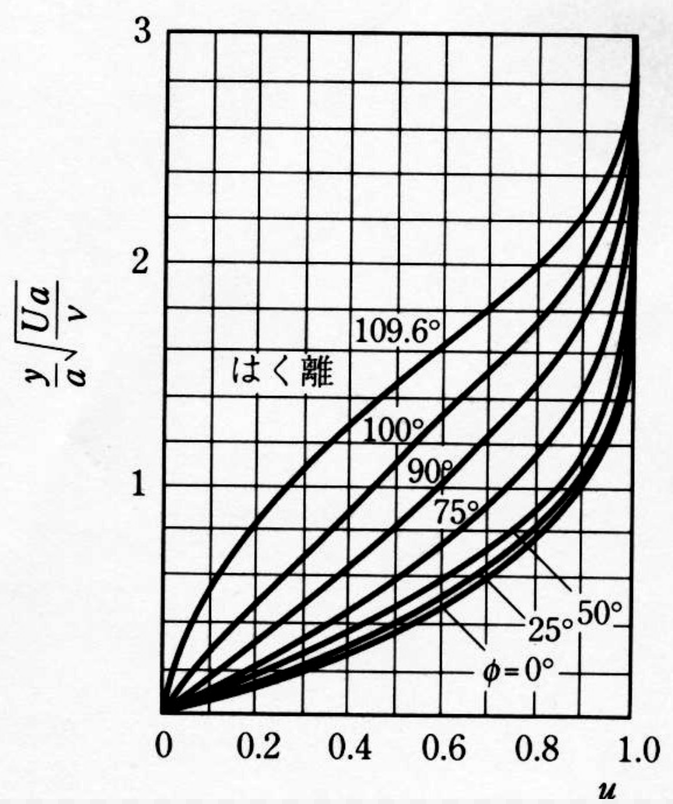
外縁でポテンシャル流れ

$$U(\phi) = 3U\sin(\frac{\phi}{2}) = 6U_0(\frac{\phi}{2}) - 6U_0\frac{1}{3!}(\frac{\phi}{2})^3 + \ldots$$

円柱表面で境界層方程式

$$f(\eta,\frac{\phi}{2}) = f_1(\eta,\frac{\phi}{2}) + f_3(\eta,\frac{\phi}{2})^3 + \ldots \Rightarrow f_i(i=1,3,5\ldots)$$

$$\frac{u}{U(x)} \Leftrightarrow \frac{y}{a}\sqrt{\frac{Ua}{\nu}}, \phi(0\to\pi)$$



@流れの剥離と伴流：

境界層は上流側で薄く、下流側で厚く

角度＝109.6（実験では84）になると、

$$u = 0, \frac{\partial u}{\partial y} < 0$$

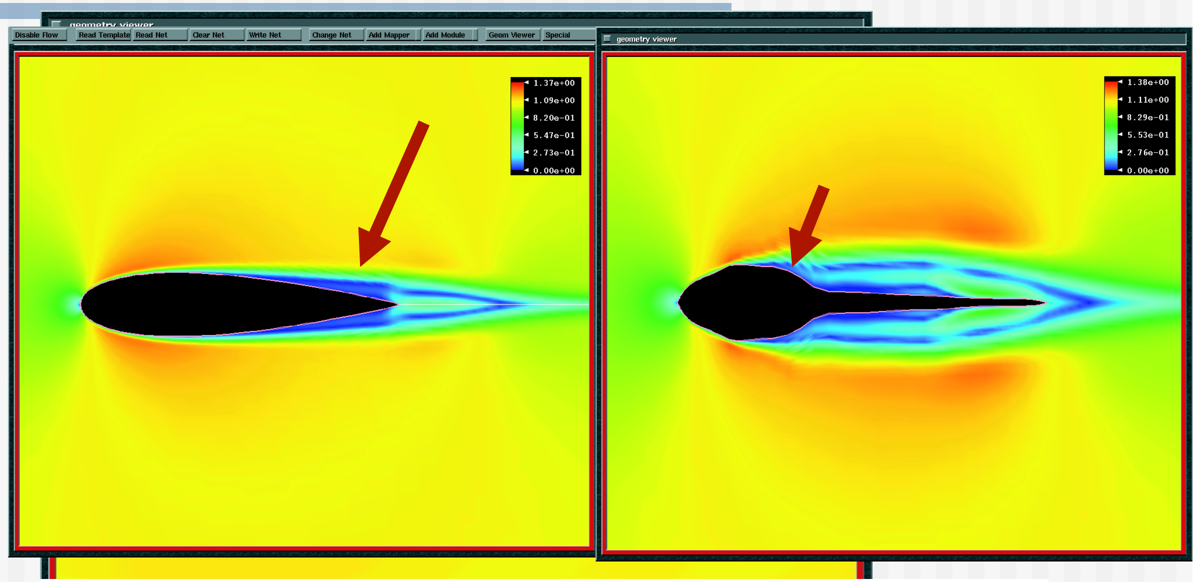
剥離が発生

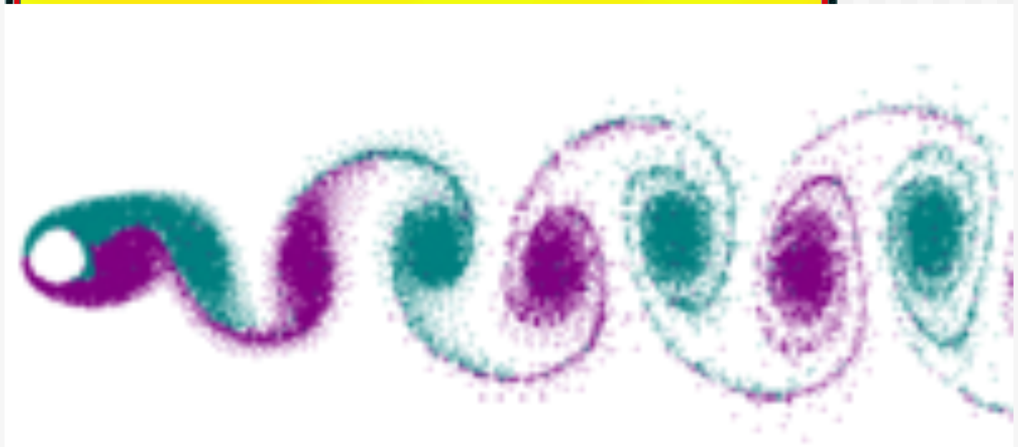
境界層に伴う剥離
Boundary layer problems

- 境界層、剥離、後流：

  @ポテンシャル流れでは
  エネルギー保存により
  前後縁では圧力対称、
  剥離無し

  @粘性があると、摩擦による
  エネルギー損失が生じ
  後縁付近では逆流が発生





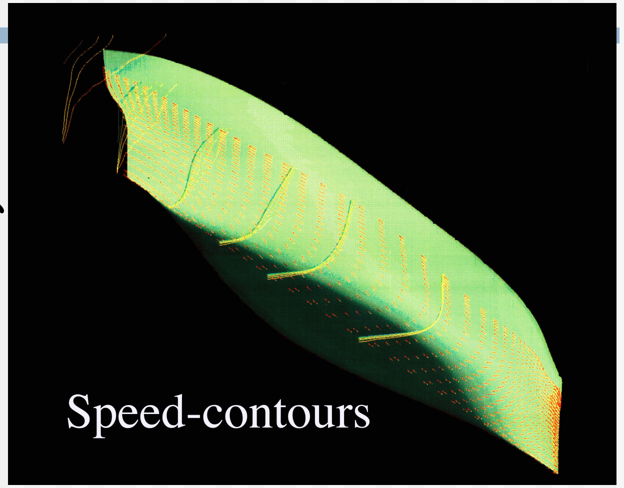
$$p + \frac{\rho}{2}U^2 = C \rightarrow \mu \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{dp}{dx}$$

@剥離点：

$$u = 0, \frac{\partial u}{\partial y} < 0$$

境界層に伴う剥離
Boundary layer problems

- 境界層、剥離、後流：
  @理想流体では抗力はゼロ：
  　ダランベールのパラドックス



@解決方法：粘性を考慮する
　１）境界層近似解
　２）ナビエーストークス方程式の数値解