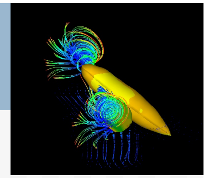
専門科目(TG010001)

流体力学II

Fluid Mechanics II

劉　　　浩
太田匡則



［授業計画・授業内容］

１．流体現象の数学的記述と基礎方程式の解析について概説する。ニュートン流体、ナビエ・ストークス方程式、レイノルズ数などを理解する。

2. ナビエ・ストークス方程式の、平行平板間の流れやクェットの流れへの適用と解析を通して、物理的現象を理解する。

3. 円管内の流れ（ポアズイユの流れ）、レイリ–の流れ、振動平板間の流れについても、ナビエ・ストークス方程式の解析や演習を通して理解する。

4. 物体近傍にできる境界層の現象、境界層理論の基礎方程式について理解する。

5. 境界層の解析の幾つかの方法、平板境界層や円柱と球まわりの境界層の形成と特質を理解する。

6. 円柱まわりの流れの剥離やカルマン渦列と円柱に働く力の関係、揚力や抗力の意義などを演習を通して理解する。

7. 中間試験

8. 理想流体での渦度：rotＶ＝０(速度ベクトルＶ)の ポテンシャル流れの導入について理解する

9. 複素ポテンシアル、速度ポテンシアル、複素速度を応用し基本的な流れたとえば一様流、斜めの一様流れを簡単な関数で表すことについて理解する

10. わきだし、吸い込み、渦糸れについて理解する

11. 円柱周り、かどを回る流れ、回転円柱について理解する

12. 循環（速度の全周積分）の導入について理解する

13. ブラジウスの定理、円柱ー平板間の写像関係、クッタの条件について理解する

14. 平板の揚力、回転円柱の揚力、ビオサヴァールの法則と楕円翼の揚力特性 、抗力係数について理解する。

15. 試験

１.流体の支配方程式 (Governing Equations)

- 連続の式：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho divV=0 \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z})=0 & \text{圧縮性流体}\\ \frac{\partial\rho}{\partial t}=0,(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z})=0 & \text{非圧縮性流体}\end{cases}$$

- ナビエ・ストークス方程式：

$$\frac{DV}{Dt}=F-\frac{1}{\rho}gradp+\nu\nabla^2V$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})+F_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})+F_y$$

1*.流体運動の記述方法 (Lagrandian and Eulerian Method)

- ニュートンの運動法則：質量x加速度＝力

$$F = m \times a = \frac{d(mv)}{dt} \rightarrow m\frac{d^2 r(x, y, z)}{dt^2} = F(f_x, f_y, f_z)$$

- ラグランジュの方法：各々の流体粒子を追う
  独立変数（時刻**t**, 流体粒子の初期位置**(a, b, c)**）
  従属変数（流体粒子の座標**(x, y, z)**と圧力**p**）

- オイラーの方法：空間位置を通過する粒子を追うー実質微分
  独立変数（時刻**t**, 位置の座標**(x, y, z)**）
  従属変数（流速**(**v_x, v_y, v_z**)**と圧力**p**）

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z$$

２．流体性質の分類 (Classification of Fluid)

- 非粘性流体とオイラー方程式:

$$gradV = 0, \frac{DV}{Dt} = F - \frac{1}{\rho} gradp$$

- 理想流体とポテンシャル流れ:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \frac{DV}{Dt} = F - \frac{1}{\rho} gradp, rotV = 0 \Rightarrow V = grad\phi \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$$

- 流体静力学:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, F - \frac{1}{\rho} gradp = 0$$

３．レイノルズ数による相似性
(Reynolds Number-based Similarity)

- 粘性流体の特徴を表すレイノルズ数：

Re=慣性力/粘性力

$$\mathrm{Re} = \frac{(\rho U^2 / L)L^3}{(\mu U / L^2)L^3} = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}, \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

- レイノルズ数の相似性：

同じReをもつ流体現象は似た性質を有する

- 無次元化された支配方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + F_y$$

4. 相似性と無次元化
(Similarity and Nondimensionalization)

- 代表的物理量：
  代表長さ＝L　代表速度＝U　代表時間＝T=L/U
- 無次元化:
  (u,v,w) = U(u*,v*,w*), (x,y,z) = L(x*,y*,z*), t=t*L/U

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\qquad \mathrm{Re}=\frac{UL}{\nu}$$

$$\frac{U}{L/U}\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+\frac{U^2}{L}\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)=-\frac{1}{\rho L}\frac{\partial p}{\partial x^*}+\nu\frac{U}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{1}{UL/\nu}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right)\Leftarrow p^*=\frac{p}{\rho U^2}$$

5. クェット流れ1 (Couette Flow)

- 間隔bの平行二平板の間を流れている流体
- 支配方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+F_y$$

- 問題分析：

定常流れ

$$\frac{\partial}{\partial t}=0$$

水平方向変化無し

$$v=0;\frac{\partial p}{\partial y}=0;\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

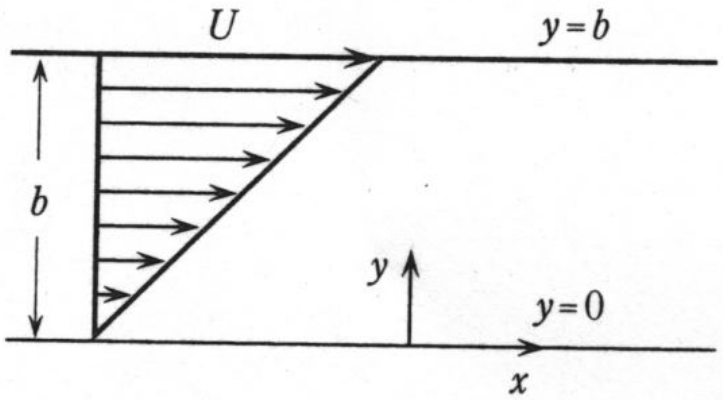


図 5•5 クエット流れ

5. クエット流れ２ (Couette Flow)

- 間隔bの平行二平板の間を流れている流体
- 支配方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{Re}\frac{d^2 u}{dy^2}$$

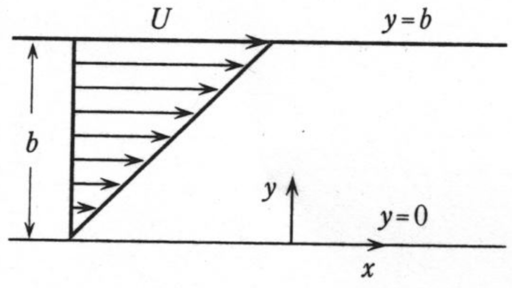


図 5・5　クエット流れ

$$u = \frac{Re}{2}\frac{dp}{dx} y^2 + Ay + B$$

- 境界条件：

粘性条件（滑りなし）

$$y = 0, u = 0$$

$$y = b, u = U$$

$$u = \frac{Re}{2}\frac{dp}{dx} y(y-b) + \frac{Uy}{b}$$

5. クェット流れ３
(Couette Flow)

- クェット流れの解とその性質：

$$u = \frac{Re}{2}\frac{dp}{dx}y(y-b) + \frac{Uy}{b}$$

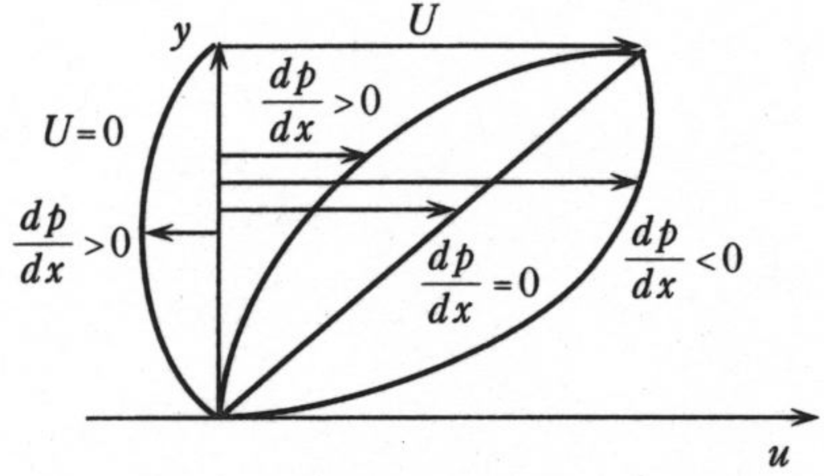


図 5・7　速度分布

- 速度分布は圧力の低い所へ向かって凸
- クェット流れ：直線速度分布（十分狭い）

  ニュートン剪断応力仮説が正しい

6. 2次元ポアズイユ流れ１ (2D Poiseuille Flow)

- 静止平行平板間の流れ：
- 支配方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+F_y$$

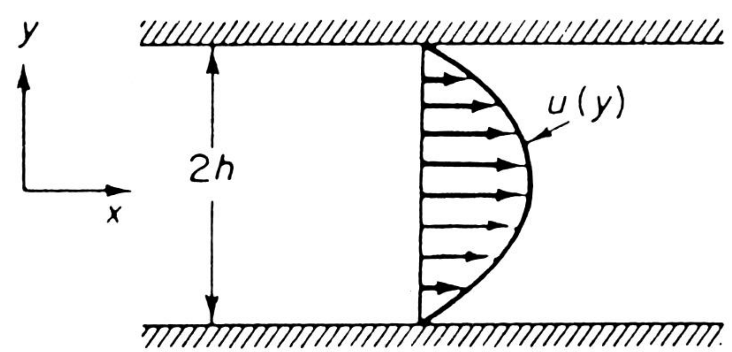
- 問題分析:

定常流れ

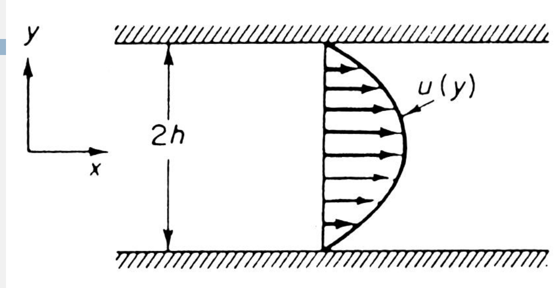
水平方向変化無し

$$\frac{\partial}{\partial t}=0$$

$$v=0;\frac{\partial p}{\partial y}=0;\frac{\partial u}{\partial x}=0$$



6. 2次元ポアズイユ流れ２ (2D Poiseuille Flow)



- 静止平行平板間の流れ：
- 支配方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{Re}\frac{d^2 u}{dy^2}$$

$$u = \frac{Re}{2}\frac{dp}{dx} y^2 + Ay + B$$

- 境界条件：

粘性条件（滑りなし）

$$y = +\frac{b}{2}, u = 0$$

$$y = -\frac{b}{2}, u = 0$$

$$u = \frac{Re}{2}\frac{dp}{dx}\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \Leftarrow \frac{dp}{dx} < 0$$

7. 演習問題 (Practice problems)

- **問題１：**

質量M=10kg、底面が10cmx25cmの長方形の物体が平板上を速度U=1m/sですべっている。平板と物体の間に、粘度μ=0.01Pasの潤滑油が厚さh=0.2mmの膜を形成しているとき、物体をすべらすのに必要な力Fを求めなさい。

解：潤滑油があるときのF=（せん断応力）x（面積）＝τA=1.25N

$\tau=\mu U/\eta$

- **問題２：**

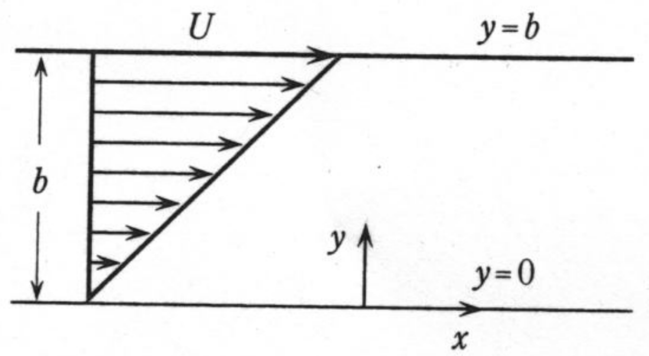
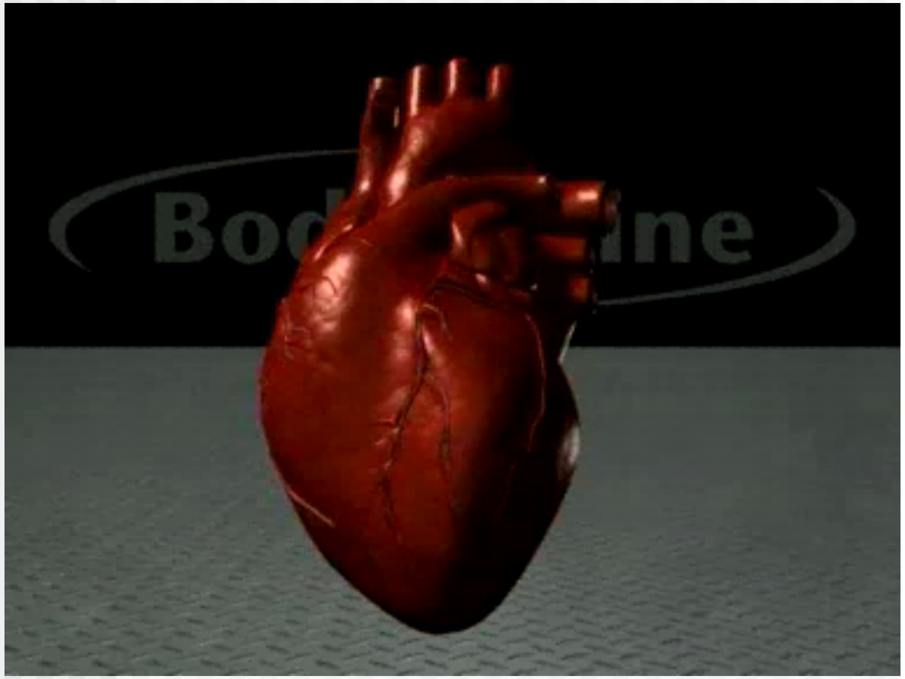
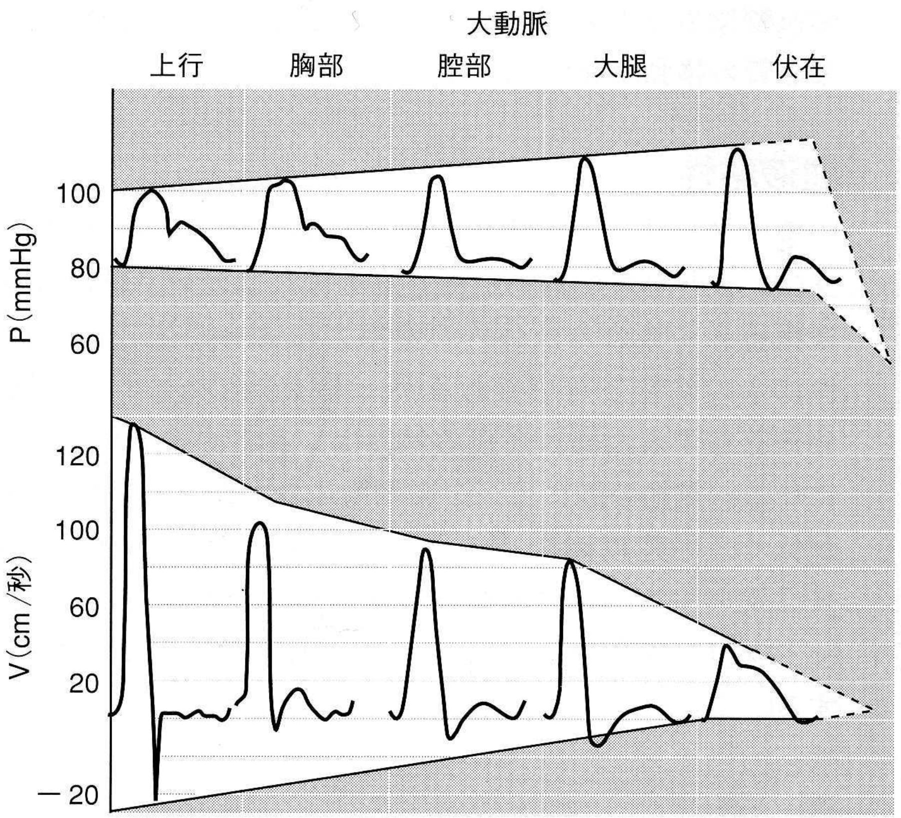


図 5•5　クエット流れ

動脈内の血液流れ

Pressure in aorta and in P. Artery has small swing because of the elastic vessels.





イヌの大動脈内の脈圧と平均流速の変化

１回当たり約70mlの血液が
駆出される拍動流
１日は、70mlx70x24x60=7056 /

• 直管内の定常流れ

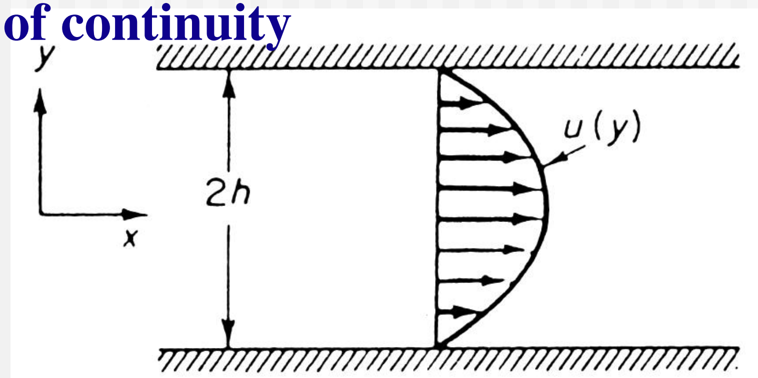
Governing equations and Conditions:

@Navier-Stokes equation and equation of continuity

@BCs

@Hagen-Poiseuille flow

@Laminar-turbulence transition



$$NS - eq:$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}, 0 = \frac{\partial p}{\partial y}, 0 = \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$BCs:$$

$$u = u(y), v = 0, w = 0; u(\pm h) = 0.$$

$$u = -\frac{1}{2\mu}\left(h^2 - y^2\right)\frac{dp}{dx}$$

$$For - a - circular - cylinder - tube,$$

$$u = -\frac{1}{4\mu}\left(a^2 - r^2\right)\frac{dp}{dx}$$

$$Q = 2\pi \int_0^a urdr = -\frac{\pi a^4}{8\mu}\frac{dp}{dx}$$